Analiza Funkcjonalna + Topologia
WPPT IVr. semestr letni 2013
WYKŁAD 14: Operatory na zespolonej ośrodkowej przestrzeni Hilberta

Klasyfikacja operatorów

Ośrodkowa przestrzeń Hilberta (zespolona) jest niezwykle wdzięcznym obiektem badań ze względu na pojęcie ortogonalności i istnienie bazy ortonormalnej. Ponadto jest to przestrzeń samosprzężona, co pozwala rozważać operatory $T : H \to H$ oraz ich sprzężone $T^* : H^* \to H^*$ na tej samej przestrzeni. Tu pojawia się mała subtelność związana z tym, że przejście od H do H^* zadane wzorem $y \mapsto f_y$, gdzie $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ jest **antyliniowe**, więc co innego oznaczać będzie T^* w sensie „banachowskim" (taki operator na H^*, że $(T^*f)(x) = f(Tx)$ dla każdego $f \in H^*$ i $x \in H$), a co innego w sensie „hilbertowskim" (taki operator, że dla każdych $x, y \in H$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$). Do końca wykładu będziemy stosować ten drugi, „hilbertowski" wariant sprzężenia operatora.

Fakt 1. Mamy następujące równości:

$$(a)\ (T^*)^* = T, \quad (b)\ \|T^*\| = \|T\|, \quad (c)\ \|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Dowód: Równość (a) jest oczywista. Z niej wynika, że do dowodu (b) wystarczy którakolwiek nierówność. Niech więc x ma normę 1. Wtedy $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \le \|x\|\|T^*Tx\| \le \|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\|$. Biorąc supremum po x, dostajemy $\|T\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\|$. Pierwsza nierówność przyda się w dowodzie (c), a skracając skrajne wyrazy przez $\|T\|$ dostajemy $\|T\| \le \|T^*\|$, co implikuje (b). Dowód (c) idzie tak: $\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$ i tak samo dla $\|TT^*\|$. W drugą stronę: $\|T\|^2 = \sup_x\langle Tx, Tx\rangle = \sup_x\langle x, T^*Tx\rangle \le \sup_{x,y}\langle y, T^*Tx\rangle = \|T^*T\|$ i analogicznie dla TT^* (zacząć od $\|T^*\|^2$). $\square$

Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ może być odwracalny lub nie. Odwracalność, to istnienie operatora liniowego T^{-1}, takiego że $T^{-1}T = TT^{-1} = I$. Do tego wystarczy jednoczesna różnowartościowość i surjektywność. Wiemy z tw. o odwzorowaniu odwrotnym, że S jest wtedy ograniczony (czyli ciągły). Różnowartościowość jest równoważna temu, że jądro jest jednoelementowe. Zarówno odwracalność jak i surjektywność (ale różnowartościowość już nie) zachodzą na otwartych zbiorach w $\mathcal{L}(H)$. Pierwszy z tych faktów udowodnimy, a drugi zrobimy na ćwiczeniach.

Twierdzenie 0. Jeśli T jest operatorem odwracalnym i $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, to S też jest odwracalny.

Dowód: Niech $A = T^{-1}S$. Mamy $\|I - A\| = \|T^{-1}(T - S)\| \le \|T^{-1}\|\|T - S\| < 1$, zatem szereg

$$B = \sum_{n=0}^{\infty}(I - A)^n$$

(konwencja $(I - A)^0 = I$) jest bezwzględnie zbieżny. Mamy

$$BA = B - (I - A)B = \sum_{n=0}^{\infty}(I - A)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(I - A)^n = (I - A)^0 = I$$

i identycznie dla AB (widać, że A komutuje z B, gdyż komutuje z I i z A). Sprawdzimy, że $S^{-1} = BT^{-1}$. Istotnie, wiemy już, że $BT^{-1}S = BA = I$, z drugiej strony $SBT^{-1} = TT^{-1}SBT^{-1} = TABT^{-1} = TIT^{-1} = I$. $\square$

Zapowiedziana klasyfikacja operatorów.
Rozróżniamy następujące ważne klasy operatorów $T \in \mathcal{L}(H)$:

• operatory normalne, to takie, które komutują ze swoim sprzężeniem $TT^* = T^*T$,

• operatory hermitowskie (czyli samosprzężone): $T^* = T$,

• operatory unitarne: odwracalność plus równość $T^* = T^{-1}$,

• projekcje: $T^2 = T$.

Operatory hermitowskie i unitarne są oczywiście normalne. Natomiast projekcje to operatory, które są identycznością na swoim obrazie. To implikuje, że obraz projekcji jest zawsze podprzestrzenią domkniętą (jako jądro $T - I$). Przykładem projekcji jest znany nam rzut ortogonalny $x \mapsto x_W$ na podprzestrzeń domkniętą W. Mamy taki fakt:

Fakt 2. Projekcja T jest rzutem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest hermitowska wtedy i tylko wtedy gdy jest normalna.

Dowód: Weźmy rzut ortogonalny na W, $Tx = x_W$. Wtedy $T^2x = Tx_W = x_W = Tx$ (bo $x_W \in W$), czyli rzut jest projekcją. Dalej, $x = x_W + (x - x_W)$ jest rozkładem na wektory ortogonalne. Mamy więc, dla dowolnych $x, y \in H$,

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x_W + (x - x_W), y_W\rangle = \langle x_W, y_W\rangle = \langle x_W, y_W + (y - y_W)\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

To oznacza, że $T = T^*$, czyli jest hermitowskość, a tym bardziej normalność.
Na odwrót, jeśli T jest projekcją normalną, to niech W oznacza obraz H przez T. Każdy x rozkłada się jako $x_W + (x - x_W)$. Wtedy $Tx = Tx_W + T(x - x_W)$. Ponieważ x_W jest w obrazie, więc T go „nie rusza": $Tx_W = x_W$. Wystarczy pokazać, że $T(y) = \mathbf{0}$ gdy $y \perp W$. Z normalności mamy

$$\|Ty\|^2 = \langle Ty, Ty\rangle = \langle y, T^*Ty\rangle = \langle y, TT^*y\rangle = 0,$$

bo $TT^*y \in W$. Pokazaliśmy, że $Tx = x_W$ dla każdego x. $\square$

Pokażemy teraz prosty fakt, który ułatwia identyfikację operatora. Jest oczywiste (co już de facto stosowaliśmy), że jeśli $\langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle$ dla wszystkich par $x, y \in H$, to $S = T$ (bo równość $\langle z, y\rangle = \langle z', y\rangle$ dla wszystkich y implikuje $z = z'$, a równość $Tx = Sx$ dla wszystkich x to równość $T = S$). Okazuje się, że wystarczy sprawdzanie dla par $x = y$:

Fakt 3. Dla dowolnych operatorów $T, S \in \mathcal{L}(H)$, jeśli $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ dla wszystkich $x \in H$, to $T = S$.

Dowód: Wystarczy pokazywać że jeśli $\langle Tx, x\rangle = 0$ dla każdego x, to T jest opeartorem zerowym (potem zastsować to do $T - S$). W takim wypadku mamy, dla dowolnych x, y,

$$0 = \langle T(x + y), x + y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle$$

oraz, podobnie

$$0 = \langle T(x + iy), x + iy\rangle = -i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle.$$

Mnożąc drugie równanie przez i i dodając stronami do pierwszego równania otrzymamy $0 = 2\langle Tx, y\rangle$. A to już oznacza, że T jest operatorem zerowym. $\square$

Podamy teraz kilka własności operatorów normalnych i unitarnych.

Twierdzenie 1. Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy
(a) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ dla każdego x.

Operatory normalne spełniają:
(b) T jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jego obraz jest gęsty.
(c) T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\inf_x \|Tx\| > 0$ (infimum po x o normie 1).
(d) Jeśli $Tx = \lambda x$, (czyli gdy x jest wektorem własnym o wartości własnej λ), to $T^*x = \bar{\lambda}x$,
(e) Jeśli λ i β są różnymi wartościami własnymi, to odpowiadające im przestrzenie własne są ortogonalne.

(f) Operator T jest unitarny wtedy i tylko wtedy gdy jest surjekcją i zachowuje iloczyn skalarny: $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ dla dowolnych $x, y \in H$, równoważnie jest surjekcją i zachowuje normę (jest izometrią ,,na").

Dowód: (a) Załóżmy normalność. Wtedy

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2.$$

Na odwrót: Jeśli $\|Tx\| = \|T^*x\|$, to powyższy rachunek dowodzi środkowej równości: $\langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle$ (dla każdego x). Z Faktu 3, $T^*T = TT^*$.

(b) Najpierw pokażemy taki oto ogólny wzór:

$$(*) \qquad T(H)^\perp = Ker(T^*),$$

który zachodzi bez żadnych założeń o operatorze: dla dowolnych x, y piszemy

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

To pierwsze jest zerem dla wszystkich x gdy $y \in T(H)^\perp$, a to drugie, jeśli $y \in Ker(T^*)$.
Teraz zakładamy normalność. Z (a) wynika natychmiast, że $Ker(T) = Ker(T^*)$. Zatem $KerT = T(H)^\perp$ i różnowartościowość T (która, jak wiadomo jest równoważna temu, że $Ker(T) = \{\mathbf{0}\}$) jest równoważna temu, że $T(H)^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Ale wiemy, że ogólnie $V^{\perp\perp} = \overline{V}$, czyli w naszym przypadku $T(H)^\perp = \{\mathbf{0}\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{T(H)} = T(H)^{\perp\perp} = \{\mathbf{0}\}^\perp = H$, czyli gdy obraz jest gęsty.

(c) Implikacja w prawo zachodzi dla dowolnych operatorów na przestrzeniach Banacha – wynika to z tw. o odwzorowaniu odwrotnym: Niech $y = Tx$ (x o normie 1), wtedy

$$1 = \|x\| = \|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\|\|y\| \quad \Longrightarrow \quad \|Tx\| = \|y\| \geq \tfrac{1}{\|T^{-1}\|} > 0.$$

Implikacja w lewo już wymaga normalności. Jeśli podane infimum jest dodatnie, to po pierwsze jądro T jest trywialne i T jest różnowartościowy, zatem z (b) obraz $T(H)$ jest gęsty. Jest on też domknięty, bo nasz warunek na infimum implikuje, że jeśli ciąg obrazów Tx_n jest zbieżny do jakiegoś y, (a zatem podstawowy), to ciąg x_n też jest podstawowy. Z zupełności daje to punkt graniczny x i wtedy $Tx = y$.

(d) x jest wektorem własym dla T z wartością własną λ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in Ker(\lambda I - T)$. Z normalności T, normalny jest też $\lambda I - T$, co na mocy (a) daje równość jąder dla $\lambda I - T$ i $(\lambda I - T)^*$. Ale ogólnie $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*$, co się sprawdza pisząc

$$\langle x, (\lambda I - T)^* y\rangle = \langle (\lambda I - T)x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle - \langle Tx, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y\rangle - \langle x, T^* y\rangle = \langle x, (\bar{\lambda} I - T^*)y\rangle.$$

Zatem $x \in Ker(\lambda I - T) \iff x \in Ker(\bar{\lambda} I - T^*)$, co daje tezę (d).

(e) Niech x i y będą wektorami własnymi odpowiadającymi wartościom własnym λ i β. Wtedy

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \bar{\beta} y\rangle = \beta\langle x, y\rangle.$$

Czyli albo $\lambda = \beta$ albo $x \perp y$.

(f) Operator unitarny jest odwracalny, a więc jest surjekcją. Dalej

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^* Ty\rangle = \langle x, T^{-1} Ty\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Z zachowywania iloczynu skalarnego wynika zachowywanie normy. Na odwrót, niech T będzie surjekcją zachowującą normę. Wtedy

$$\langle T^* Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle,$$

co na mocy Faktu 3 dowodzi, że $T^* T = I$. Z założeń wynika, że T jest odwracalny, więc ta równość już wystacza do stwierdzenia, że $T^* = T^{-1}$. $\square$

Punkt (f) mówi, że operatory unitarne to to samo, co izometryczne izomorfizmy H na siebie. Odpowiada to operatorom zamiany jednej bazy ortonormalnej na drugą.

Widmo (spektrum) operatora

Jak już wcześniej zauważyliśmy, x jest wektorem własnym operatora T odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do jądra operatora $\lambda I - T$. Czyli λ jest wartością własną, wtedy i tylko wtedy, gdy jądro $\lambda I - T$ jest nietrywialne, czyli gdy $\lambda I - T$ nie jest różnowartościowy. W szczególności wtedy $\lambda I - T$ jest nieodwracalny. Zauważmy, że λI jest zawsze odwracalny i odwracalność zachodzi na zbiorze otwartym operatorów. Na przykład jeśli norma T jest znacznie mniejsza od λ, to $\lambda I - T$ jest odwracalny. Operator $\lambda I - T$ i jego niedwracalność są na tyle ważne, że zasługują na specjalną terminologię. Poniższa definicja stosuje się do dowlnych operatorów na przestrzeniach Banacha.

Definicja. *Widmem* (lub *spektrum*) operatora T nazywamy zbiór $\sigma(T)$ tych liczb zespolonych, dla których operator $\lambda I - T$ jest nieodwracalny.[1] Widmo składa się z dwóch rodzajów punktów: takich, że $\lambda I - T$ nie jest różnowartościowe – są to wartości własne i ich zbiór nazywa się *spektrum punktowym*, i pozostałych, czyli takich że $\lambda I - T$ jest różnowartościowe, ale nie jest surjektywne.

Fakt 4 Jeśli operator T jest odwracalny, to $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$.

[1]Na pozostałych liczbach zespolonych mamy przyporządkowanie $\lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$ zwane *resolwentą* operatora T.

Dowód: Mamy $\lambda I - T = \lambda T(T^{-1} - \lambda^{-1} I) = -\lambda T(\lambda^{-1} I - T^{-1})$, zatem (wobec odwracalności T) lewa strona jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne jest $\lambda^{-1} I - T^{-1}$. $\square$

Twierdzenie 2. Widmo jest zawsze zbiorem domkniętym, zawartym w kole o promieniu równym promieniowi spektralnemu[2] $r(T)$ (w szczególności spektrum jest zwarte).[3] Dla operatorów normalnych mamy

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}}$$

oraz

$$r(T) = \|T\|.$$

Widmo operatora hermitowskiego jest rzeczywiste. Widmo operatora unitarnego jest zawarte jest w okręgu jednostkowym.

Dowód: Domkniętość widma wynika natychmiast z otwartości zbioru operatorów odwracalnych oraz ciągłości w normie przyporządkowania $\lambda \mapsto \lambda I - T$. Jeśli teraz $\lambda > r(T)$, to

$$\lim_n \left\| \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right\|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|\lambda|} \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \frac{r(T)}{|\lambda|} < 1,$$

zatem z kryterium Cauchy'ego szereg

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

(konwencja $T^0 = I$) jest bezwzględnie zbieżny, a więc zbieżny. Łatwo sprawdza się, że operator S jest odwrotnym do $\lambda I - T$. Stąd $\lambda \notin \sigma(T)$. Wykazaliśmy zwartość widma i jego ograniczenie przez promień spektralny.

Niech teraz T będzie operatorem normalnym. Jeśli $\lambda \notin \overline{\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}}$, to

$$0 < \inf_{\|x\|=1} |\lambda - \langle Tx, x\rangle| = \inf_{\|x\|=1} |\lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle| = \inf_{\|x\|=1} |\langle(\lambda I - T)x, x\rangle|.$$

Ponieważ $\lambda I - T$ jest też operatorem normalnym, więc z Twierdzenia 1 (c), jest on odwracalny i $\lambda \notin \sigma(T)$.

Dalej z faktu 1 (c), z normalności (ozn. $\stackrel{n}{=}$) oraz z tego, że TT^* jest samosprzężony i znowu dwa razy zastosowanego faktu 1 (c), mamy

$$\|T^2\|^2 = \|T^2(T^2)^*\| = \|T^2(T^*)^2\| \stackrel{n}{=} \|(TT^*)^2\| = \|(TT^*)(TT^*)^*\| = \|TT^*\|^2 = \|T\|^4.$$

Dalej przez indukcję dostaniemy $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ $(n \geq 1)$, co w granicy daje

$$r(T) = \lim_n \tfrac{1}{2^n} \|T^{2^n}\| = \|T\|.$$

Niech T będzie hermitowski. Wtedy $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, czyli jest to liczba rzeczywista (dla dowolnego x). Stąd spektrum jest zawarte w zbiorze liczb rzeczywistych.

Operator unitarny jest normalny, ma normę 1 i odwrotny też ma normę jeden. To oznacza, że liczby z widma mają moduły co najwyżej 1 (patrz wcześniejsze tezy Twierdzenia 2) i ich odwrotności też (Fakt 4). To implikuje, że wszystkie liczby z widma są o module 1. $\square$

---

[2]Przypomnijmy: $r(T) = \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$.

[3]Koło o promieniu $r(T)$ zawiera przynajmniej jeden punkt z widma (w szczególności widmo jest niepuste). Dowód tego faktu pominiemy.

Analiza Funkcjonalna + Topologia
WPPT IVr. semestr letni 2013
WYKŁAD 15: Miary spektralne i sformułowanie twierdzenia spektralnego

Podamy teraz dość skomplikowaną definicję miary na przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ) o wartościach w $\mathcal{L}(H)$, zwanej miarą sepktralną. Później podamy tzw. Twierdzenie Spektralne mówiące, że każdy operator normalny jest w pewnym sensie wartością średnią z pewnej miary spektralnej określonej na swoim widmie. Na kolejnych wykładach twierdzenie to udowodnimy w przypadku operatorów unitarnych, gdzie przyjmuje ono nieco przystępniejszą postać.

Miary spektralne

Defnicja. Niech (Ω, Σ) będzie przestrzenią mierzalną (tzn. Σ jest sigma-ciałem podzbiorów Ω). *Miarą spektralną* (inaczej *rozkładem jedynki*) na Σ jest przyporządkowanie $E : \Sigma \to \mathcal{L}(H)$ (gdzie H jest zespoloną ośrodkową przestrzenią Hilberta) spełniającą następujące warunki:

(1) $E(\emptyset) = \mathbf{0}$ (operator zerowy), $E(\Omega) = I$ (operator identycznościowy),
(2) dla każdego $A \in \Sigma$, $E(A)$ jest rzutem ortogonalnym,
(3) $E(A \cap B) = E(A) \circ E(B)$,
(4) $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$, o ile tylko $A \cap B = \emptyset$,
(5) dla dowolnych $x, y \in H$ funkcja zbioru $A \mapsto E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle$ jest miarą zespoloną (przeliczalnie addytywną) na Σ.

Uwagi:

• Ponieważ projekcja ortogonalna jest zdeterminowana przez podprzestrzeń domkniętą przestrzeni H, na którą jest rzutowanie, rozkład jedynki można traktować jako przyporządkowanie zbiorom $A \in \Sigma$ podprzestrzeni domkniętych w taki sposób, że zbiorom rozłącznym odpowiadają podprzestrzenie ortogonalne, sumie zbiorów odpowiada suma algebraiczna podprzestrzeni, całemu zbiorowi Ω odpowiada cała przestrzeń H, a zbiorowi pustemu – przestrzeń trywialna $\{\mathbf{0}\}$.

• Ponieważ wszystkie nietrywialne projekcje mają normę 1, nie ma szans na przeliczalną addytywność miary spektralnej w sensie sumowalności w normie operatorowej. Jeśli jednak ustalimy punkt x, to jego projekcje $E(A)x$ tworzą funkcję na Σ o wartościach w H, która już jest przeliczalnie addytywna. To właśnie gwarantuje ostatni warunek.

Przykład: Niech $H = L^2(\mu)$, gdzie μ jest zwykłą miarą (nieujemną) na przestrzeni (Ω, Σ). Na tej samej przestrzeni określamy miarę spektralną wzorem

$$E(A) = \mathrm{Proj}_{\,L^2(\mu_A)},$$

gdzie μ_A oznacza miarę μ obciętą do podzbiorów A. Inaczej można to zapisać tak

$$E(A)f = f \cdot \mathbf{1}_A.$$

Całka miarą spektralną. Musimy teraz nauczyć się całkować funkcje zespolone względem miar spektralnych. Do naszych celów wystarczy całkowanie funkcji ograniczonych.

Definicja. Niech E będzie miarą spektralną na (Ω, Σ) i niech $f : \Omega \to \mathbb{C}$ będzie funkcją Σ-mierzalną i ograniczoną. Wtedy przez $\int f\,dE$ oznaczamy *jedyny* operator $T_f \in \mathcal{L}(H)$ spełniający, dla dowolnych $x, y \in H$, zależność

$$(**) \qquad \langle T_f x, y\rangle = \int f\,dE_{x,y}.$$

Oczywiście, powyższa definicja wymaga dowodu istnienia i jednoznaczności.

Twierdzenie 3. Powyższa całka istnieje i jest jednoznaczna, dla każdej funkcji f mierzalnej i ograniczonej.

Dowód poprzedzimy elementarnym lematem

Lemat 1. Jeśli $T_f = \int f\,dE$ jest określony to $\|T_f\| \le \|f\|_\infty$.

Dowód: Normę operatora można ustalić tak $\|T_f\| = \sup\{\langle T_f x, y\rangle : \ \|x\| = \|y\| = 1\}$. Dla dowolnych x, y o normie 1 mamy $\langle T_f x, y\rangle = \int f\,dE_{x,y}$. Wystarczy więc zauważyć, że miara (zespolona) $E_{x,y}$ ma tę własność, że całki z funkcji ograniczonych przez 1 nie przekraczają 1 co do modułu. Z własności miar zespolonych, wystarczy to pokazać dla funkcji prostych, $f = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$ (A_i rozłączne, $|c_i| \le 1$). Wtedy mamy

$$\int f\,dE_{x,y} = \sum_{i=1}^k c_i \langle E(A_i)x, y\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^k c_i E(A)x\,,\ y\Big\rangle.$$

Teraz już wystarczy pokazywać, że wektor $\sum_{i=1}^k c_i E(A_i)x$ ma normę co najwyżej 1. Wektory $E(A_i)x$ to rzuty x na wzajemnie ortogonalne podprzestrzenie, więc z nierówności Parsevala mamy

$$\sum_{i=1}^k \|E(A_i)x\|^2 \le \|x\|^2 = 1.$$

Tę samą nierówność spełniają wektory $c_i E(A_i)x$ (w miejsce $E(A_i)x$), a ponieważ nadal są one wzajemnie ortogonalne, to norma ich sumy (z twierdzenia Pitagorasa) również nie przekracza 1. $\square$

Dowód twierdzenia 3: Dowód przeprowadzimy ,,metodą komplikacji": najpierw dla funkcji charakterystycznych, potem prostych i wreszcie dowolnych ograniczonych. Jeśli f jest funkcją charakterystyczną $\mathbf{1}_A$, to mamy, dla dowolnych $x, y \in H$,

$$\int f\,dE_{x,y} = E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle,$$

zatem aby zachodził wzór (**) musimy położyć $T_f = E(A)$. Zatem po prostu $\int f\,dE = E(A)$ i jest to jedyna możliwość. Jeśli teraz f oznacza funkcję prostą, czyli kombinację liniową

$$f = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \mathbf{1}_{A_i},$$

to kładziemy

$$(***) \qquad \int f\,dE = \sum_{i=1}^{k} c_i E(A_i).$$

Ponieważ wzór (**) zachodzi dla funkcji prostych i obie jego strony są liniowe – będzie on zachodził również dla funkcji prostych. I znowu jest to jedyna możliwość. Aby zdefiniować całkę z funkcji mierzalnej ograniczoną f przybliżamy ją jednostajnie zbieżnym ciągiem funkcji prostych f_n. Twierdzimy, że operatory T_{f_n} zbiegają w normie. Ale to jest oczywiste, bo skoro f_n zbiegają jednostajnie, to stanowią ciąg podstawowy w normie supremum. Na mocy lematu operatory T_{f_n} stanowią ciąg podstawowy w normie operatorowej, a więc, z zupełności $\mathcal{L}(H)$, zbieżny. W tym momencie definiujemy $T_f = \lim_n T_{f_n}$. Z drugiej strony, ponieważ $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, więc, z tego samego lematu, musi zachodzić zbieżność T_{f_n} do T_f w normie operatorowej, co implikuje, że tak znaleziony T_f, jeśli jest dobry, to jest jedyny. Trzeba więc sprawdzić wzór (**) dla f i T_f, co jest natychmiastowe z twierdznia Lebesgue'a dla zwykłych miar $E_{x,y}$. $\square$

Wróćmy do naszego przykładu, gdzie $E(A)f = f \cdot \mathbf{1}_A$. Jak tu wygląda $\int f\,dE$ dla funkcji ograniczonej f? Otóż, jest to operator T_f zadany wzorem $T_f(g) = fg$ $(g \in L^2(\mu))$. Sprawdzenie tego zostawiamy na ćwiczenia.

Musimy teraz powiedzieć, co to jest *zbiór istotnych wartości* funkcji f względem miary spektralnej. Otóż zbiór $A \in \Sigma$ jest *miarę E zero* jeśli $E(A)$ jest operatorem zerowym. Jest to równoważne z tym, że A jest zbiorem zerowym dla wszystkich miar $E_{x,y}$ (uwaga, dla miar zespolonych ,,zbiór zerowy" to coś więcej niż ,,zbiór miary zero" – każdy jego podzbór musi być miary zero). Wartość z_0 funkcji f nazwiemy *nieistotną*, jeśli istnieje $\epsilon > 0$ taki, że przeciwobraz koła $\{z : |z - z_0| < \epsilon\}$ ma miarę E zero. Pozostałe liczby to *wartości istotne*. Wprost z definicji widać, że zbiór wartości istotnych jest domknięty, a dla funkcji ograniczonej – ograniczony, a więc zwarty.

Twierdzenie 4. Operator $T_f = \int f\,dE$ jest normalny. Jego widmo pokrywa się ze zbiorem istotnych watrości f. Jego norma (a więc i promień spektralny) jest równy supremum modułów istotnych wartości f.
T_f jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy jego widmo jest zawarte w okręgu jednostkowym.

Dowód: Operatorem sprzężonym do T_f jest $T_{\bar{f}}$. Sprawdzimy to najpierw dla funkcji charakterystycznej $f = \mathbf{1}_A$. Wtedy T_f jest projekcją ortogonalną więc jest samosprzężony, co się zgadza, bo f jest rzeczywista i $f = \bar{f}$. Dla funkcji prostych, wzór wynika teraz z antyliniowości sprzężenia operatorowego, a dla dowolnych ograniczonych – z ciągłości tegoż. Następnie sprawdzimy, że złożenie $T_f \circ T_g$ jest równe T_{fg}. Znowu, jest to prawda dla funkcji charakterystycznych (wzór (3) w definicji miary sprektralnej), potem przez liniowość złożenia przenosi się to na funkcje proste i przez ciągłość na funkcje dowolne. Z tego wynika, że wszelkie operatory T_f (otrzymane jako całki z różnych funkcji względem tej samej miary spektralnej) komutują, między innymi T_f jest normalny.

Pokażemy teraz, że T_f jest odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy zero nie jest wartością istotną funkcji f.

Jeśli T_f jest odwracalny, to z Twierdzenia 0 (z poprzedniego wykładu) i Lematu 1, odwracalne są T_g dla funkcji prostych g dostatecznie bliskich jednostajnie funkcji f, powiedzmy bliskich o ϵ. Przypuśćmy teraz, że 0 jest istotną wartością f. Wtedy $|f| < \epsilon$ na zbiorze A_0 niezerowej miary E i istnieje funkcja prosta g postaci $\sum_{i=0}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}$, oparta na rozłącznych zbiorach $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (A_0 już zdefiniowaliśmy), zerująca sięna A_0 (czyli $c_0 = 0$), bliska f o ϵ (a więc dająca odwracalny operator T_g). Wtedy $E(A_0)$ jest rzutem ortogonalnym na *niezerową* podprzestrzeń domkniętą V. Weźmy dowolny $x \in V$. Wtedy, ze wzoru (***), $T_g(x) = \sum_{i=0}^n c_i E(A_i)(x) = \mathbf{0}$ (bo dla $i = 0$ mamy $c_0 = 0$, a dla pozostałych i rzutowanie jest na przestrzenie ortogonalne do V, więc zeruje się na x). Tak więc V jest zawarta w jądrze T_g, co przeczy jego odwracalności.

W dowodzie w przeciwną stronę skorzystamy z Twierdzenia 1 (c) (wiemy już, że T_f jest normalny). Przypuśćmy, że 0 nie jest istotną wartością funkcji f. To znaczy, że istnieje $r > 0$ takie, że zbiór $A_0 = \{x : |f(x)| < r\}$ ma miarę E zero. Weźmy x o normie 1. Aby oszacować z dołu $\|T_f x\|$ przybliżamy f jednostajnie z dokładnością do (dowlnie małego) $\epsilon > 0$ funkcją prostą $g = \sum_{i=0}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}$, która wszędzie oprócz zbioru A_0 spełnia $|g| \geq r$, czyli $|c_i| \geq r$ ($i = 1, \ldots, n$). Wtedy (znów korzystamy z Lematu 1) $\|T_f - T_g\| \leq \epsilon$, skąd $\|T_f x - T_g x\| \leq \epsilon$. Dalej

$$T_g x = \sum_{i=0}^n c_i E(A_i)x = \sum_{i=1}^n c_i E(A_i)x \quad \text{(bo } E(A_0) \text{ jest operatorem zerowym).}$$

Pamiętamy (skończona addytywność E), że $\sum_{i=0}^n E(A_i) = E(\Omega) = I$. Ponieważ $E(A_0)$ jest operatorem zerowym, więc musi być $\sum_{i=1}^n E(A_i) = I$. Stąd

$$x = \sum_{i=1}^n E(A_i)x.$$

Przestrzenie obrazów rzutów $E(A_i)$ są wzajemnie ortogonalne (bo A_i są rozłączne), więc zarówno powyższy rozkład x, jak i wcześniejszy rozkład $T_g x$ spełniają twierdzenie Pitagorasa:

$$(****) \qquad 1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|E(A_i)x\|^2, \quad \|T_g x\|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \|E(A_i)x\|^2.$$

Ale $|c_i| \geq r$ dla $i = 1, \ldots, n$, więc

$$\|T_g x\|^2 \geq r^2 \sum_{i=1}^n \|E(A_i)x\|^2 = r^2.$$

Pokazaliśmy, że $\|T_g x\| \geq r$, zatem $\|T_f x\| \geq r - \epsilon$, a z dowolności epsilona $\|T_f x\| \geq r$. Zatem infimum w Twierdzeniu 1 (c) jest co najmniej r, co dowodzi odwracalności T_f.

Określimy teraz widmo T_f. Jest to zbór tych $\lambda \in \mathbb{C}$, że operator $\lambda I - T_f$ jest nieodwracalny. Łatwo jednak sprawdzić, że $\lambda I - T_f = T_{\lambda - f}$. Ten operator jest noeodwracalny jeśli 0 jest istotną wartościć funkcji $\lambda - f$, co jest równoważne temu, że λ jest istotną wartością funkcji f.

Obliczymy teraz normę operatora T_f. Znowu równość $\|T\| = ess\sup\{|f(z)|\}$ jest oczywista dla funkcji charakterystycznych, potem łatwa dla funkcji prostych, a na funkcje ograniczone przechodzi poprzez aproksymację jednostajną funkcjami prostymi, oraz to, że norma T_f jest ciągłą funkcją względem jednostajnej zbieżności funkcji f, i wreszcie dzięki nietrudnej obserwacji, że zbiory wartości istotnych funkcji jednostajnie bliskich są sobie bliskie (i mają bliskie sobie promienie).

Pozostało do udowdnienia ostatnie zdanie w tezie (o unitarności). Wiemy już (Twierdzenie 2), że widmo operatora unitarnego jest zawarte w okręgu jednostkowym. Trzeba udowodnić implikację przeciwną. A więc załóżmy, że wszystkie wartości istotne funkcji f są o module 1. Wtedy f można (poza zbiorem miary E zero) przybliżać funkcjami prostymi o wartościach c_i o module 1 i we wzorze na $\|T_g x\|^2$ (druga część wzoru (****)) wyjdzie równość z $\|x\|^2$. Zatem każdy taki przybliżający operator T_g jest izometrią, a ze zbieżności w normie również T_f jest izometrią, a ponieważ jest on odwracalny (bo 0 nie jest istotną wartością f), to jest izometrią ,,na", czyli operatorem unitarnym (Twierdzenie 1 (f)). $\square$

Podamy teraz kluczowe twierdzenie w teorii operatorów na przestrzeni Hilberta, tzw. twierdzenie spektralne. Ogólny przypadek pozostawimy bez dowodu. Później podamy dowód tego twierdzenia dla operatorów unitarnych, gdzie miara spektralna przybierze bardziej przyjazną postać zwykłej miary probabilistycznej na okręgu jednostkowym.

Twierdzenie 5 (Spektralne). Niech $T \in \mathcal{L}(H)$ będzie dowolnym operatorem *normalnym* na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Wtedy istnieje miara spektralna E jednoznacznie określona na zbiorze liczb zespolonych (a ściślej na podzbiorach borelowskich $\mathbb{C}$), taka że

$$T = \int z \, dE(z)$$

(całka miarą spektralną E z funkcji identycznościowej od zmiennej z). Ponadto miara E zeruje się na dopełnieniu widma operatora T (mówimy, że jest *skupiona* na widmie), czyli można napisać

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE(\lambda).$$

Wniosek. Dla operatora normalnego promień spektralny (który jest równy normie) jest równy promieniowi widma (bo widmo jest zbiorem istotnych wartości funkcji identycznościowej na widmie). W szczególności (ze zwartości widma) istnieje liczba $\lambda \in \sigma(T)$, taka że $|\lambda| = r(T)$.

Tomasz Downarowicz